Chapitre 4
Sommes et produits

Plan du chapitre

1 Sommes et produits

1.1 Notations $\sum$ et $\prod$

Définition 4.1

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \cdots, a_n$ des nombres réels. On notera leur somme et leur produit par :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \ldots + a_n \qquad \text{"somme pour } i \text{ allant de 0 à } n \text{ des } a_i\text{".}$$

$$\prod_{i=0}^{n} a_i = a_0 \times a_1 \times \ldots \times a_n \qquad \text{"produit pour } i \text{ allant de 0 à } n \text{ des } a_i\text{".}$$

La lettre i est appelé l'indice de sommation. Il s'agit toujours d'un **nombre entier**. Le choix de la lettre i est arbitraire, c'est une variable **muette** (cf chapitre 0) :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{\heartsuit=0}^{n} a_\heartsuit \qquad \text{mais pas} \quad \cancel{\sum_{n=0}^{n} a_n} \quad !!$$

Souvent, l'expression a_i est de la forme $f(i)$ avec f une fonction simple et explicite. Les termes à sommer / à multiplier sont alors simplement $f(0), f(1), \cdots, f(n)$:

Exemple 1. $\displaystyle\sum_{i=0}^{2} \underbrace{i^3}_{f(i)} = \underbrace{0^3}_{f(0)} + \underbrace{1^3}_{f(1)} + \underbrace{2^3}_{f(2)} = 9$ $\qquad \displaystyle\prod_{k=n-1}^{n} 2^k = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Dans la définition précédente, l'indice i commence à 0, mais il est très fréquent de le faire commencer à 1, 2 ou plus. On étend donc cette définition à un cadre plus général :

Définition 4.2

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$. Soit $a_m, a_{m+1}, \cdots, a_{n-1}, a_n$ des nombres réels. On notera :

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

$$\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \times a_{m+1} \times \ldots \times a_{n-1} \times a_n$$

L'entier m joue le rôle de valeur de départ pour i et l'entier n celui de sa valeur d'arrivée. Lorsqu'on écrit $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} \ldots$ et $\displaystyle\prod_{i=m}^{n} \ldots$, les entiers m et n doivent avoir été introduits au préalable pour que ces quantités soient bien définies.

Exemple 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$

L'expression de a_i peut dépendre des valeurs de i, de m ou de n, mais aussi être constante, cf exemples ci-dessous.

Exemple 3. Soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$. Écrire sous forme développée les expressions suivantes :

$\displaystyle\sum_{k=n}^{n} k = \ldots$

$\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{e^k}{k^2+k} = \ldots$

$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \displaystyle\sum_{i=0}^{2} (a+ib) = \ldots$

$\displaystyle\prod_{j=m+1}^{n} n(j-m) = \ldots$

$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} n = \ldots$

$\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_{2i+1} = \ldots$

Dans la somme $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} (\cdots)$, il y a .... termes

Remarque. Du fait que l'indice de sommation est une variable muette, il est tout à fait légitime d'écrire une expression de la forme :

$$\sum_{i=0}^{n} \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\substack{\text{portée de } i \\ \text{(première somme)}}} + \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\substack{\text{portée de } i \\ \text{(seconde somme)}}}$$

1.2 Familles d'objets

Définition 4.3

Soit I un ensemble quelconque. On dit que $(a_i)_{i\in I}$ est une famille de réels indexée par I si pour tout $i \in I$, on a $a_i \in \mathbb{R}$.

Cela revient à définir une fonction $a : I \to \mathbb{R}$ et, pour tout $i \in I$, de noter a_i le réel $a(i)$.

Exemple 4.

- Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspond à une famille $(u_0, u_1, \cdots)$ de réels indexés par $\mathbb{N}$. On peut ainsi voir une suite comme une fonction u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, qui à un entier naturel n associe un réel u_n. On trouve d'ailleurs parfois la formulation "u est une suite réelle" au lieu de "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle".
- Lorsque $I = [\![1, n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est en général notée $(a_i)_{1\leq i\leq n}$.

Définition 4.4

Soit I un ensemble **fini** et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels. On note la somme et le produit de tous les éléments de cette famille par :

$$\sum_{i\in I} a_i \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in I} a_i$$

Exemple 5.

- Avec $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$, on a : $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i\in[\![m,n]\!]} a_i$.
- Pour sommer uniquement sur les indices pairs de $[\![1, n]\!]$, on trouve plusieurs notations :

$$\sum_{i\in[\![1,n]\!]\cap 2\mathbb{N}} a_i \quad = \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ pair}}}^{n} a_i \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque (Convention de sommation sur $\varnothing$)**.** Par convention si l'ensemble de sommation I est vide, on pose :

$$\sum_{i\in\varnothing} (\cdots) = 0 \qquad \text{et} \qquad \prod_{i\in\varnothing} (\cdots) = 1$$

Exemple 6. En particulier, on peut écrire :

Théorème 4.5

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $\boxed{m > n}$. Grâce à la convention :

$$\sum_{i=m}^{n} (\cdots) = 0 \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=m}^{n} (\cdots) = 1$$

Dans ce chapitre, on se restreindra toujours au cas où la somme (ou le produit) ne concerne qu'un nombre fini de termes. Cela conduit à l'hypothèse suivante :

Hypothèse

On supposera dans toute la suite que I est un sous-ensemble **fini** de $\mathbb{N}$.

Remarque. Dans une somme ou un produit fini, on peut sommer / faire le produit des termes dans l'ordre qu'on souhaite sans changer le résultat.

1.3 Sommes usuelles (partie 1)

Exemple 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = \ldots\ldots$

Théorème 4.6 – "$+1-1$ terme"

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$. Soit $(a_i)_{m \leq i \leq n}$ une famille de réels.

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + \sum_{i=m+1}^{n} a_i \qquad \prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \left(\prod_{i=m+1}^{n} a_i \right)$$

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = a_n + \sum_{i=m}^{n-1} a_i \qquad \prod_{i=m}^{n} a_i = a_n \left(\prod_{i=m}^{n-1} a_i \right)$$

Exemple 8. Grâce au Théorème 4.5, le théorème ci-dessus est encore valide si $m = n$: $\displaystyle\sum_{i=n}^{n} a_i = a_n + \sum_{i=n+1}^{n} a_i = a_n$

⚠ Lorsqu'on extrait un terme d'une somme (ou d'un produit), il faut veiller à ce qu'on ne sorte pas ce terme d'une somme "vide" :

$$\sum_{i=n}^{n} i \overset{\text{vrai}}{=} n + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{n} i}_{\text{somme "vide"}} \overset{\text{faux !}}{=} n + (n+1) + \sum_{i=n+2}^{n} i$$

Théorème 4.7 – Sommes usuelles

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1.

2.

Démonstration.

La deuxième formule se montre également par récurrence (laissée en exercice). □

1.4 Télescopage

Théorème 4.8 – Sommes / Produits télescopiques

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$ et $(x_k)_{m \leq k \leq n+1}$ une famille de réels.

$$\sum_{k=m}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_m$$

Si $x_m, \cdots, x_n$ sont tous non nuls :

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{x_m}$$

Démonstration.

De même, pour le produit :

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{n+1}}{\cancel{x_n}} \times \frac{\cancel{x_n}}{\cdots} \times \ldots \times \frac{\cdots}{\cancel{x_{m+1}}} \times \frac{\cancel{x_{m+1}}}{x_m} = \frac{x_{n+1}}{x_m}$$

□

Plutôt que d'apprendre par cœur ces formules de télescopage, il est plus efficace de retenir : $\sum(x_{k+1}-x_k) =$ ”dernier terme" − "premier terme", où dernier terme se réfère au terme x_k avec l'indice k le plus grand quand on développe la somme, et le premier terme celui dont l'indice k est le plus petit. L'idée est similaire pour $\prod \frac{x_{k+1}}{x_k}$, mais le − est remplacé par un quotient.

Remarque. Soit a et b deux réels positifs. On considère l'expression $\sqrt{a}+\sqrt{b}$. On définit l'expression conjuguée de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ comme étant le réel $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. Lorsqu'on dispose d'une fraction de la forme $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, l'expression conjuguée permet de faire disparaitre les racines du dénominateur en multipliant en haut et en bas par l'expression conjuguée (cf exemple ci-dessous) :

Exemple 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$.

1.5 Opérations sur les sommes et produits

Théorème 4.9 – Opérations avec $\sum$ et $\prod$

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de réels.

$$\sum_{i\in I}(a_i+b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i \qquad\qquad \prod_{i\in I}(a_i b_i) = \left(\prod_{i\in I} a_i\right)\left(\prod_{i\in I} b_i\right)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \sum_{i\in I}(\lambda a_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i \qquad\qquad \forall p \in \mathbb{N} \quad \prod_{i\in I} a_i^p = \left(\prod_{i\in I} a_i\right)^p$$

Démonstration. On fait les preuves uniquement pour le symbole $\sum$ dans le cas où $I = [\![1,n]\!]$. Toutes les preuves consistent à passer à la forme développée et à regrouper les termes différemment :

Sur le même principe, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$\square$

Remarque. Les deux formules qu'on vient de montrer sur le symbole $\sum$ font que l'opération de somme est dite linéaire. Beaucoup d'opérations classiques sont linéaires : si f, g sont des fonctions dérivables et si (u_n) et (v_n) admettent des limites, on a :

$$\text{L'intégrale est linéaire : } \begin{cases} \displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx \end{cases}$$

$$\text{La dérivation est linéaire : } \begin{cases} (f+g)' = f' + g' \\ (\lambda f)' = \lambda f' \end{cases}$$

$$\text{Le passage à la limite est linéaire : } \begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\lambda u_n) = \lambda \lim_{n\to+\infty} u_n \end{cases}$$

Pour appliquer la règle $\displaystyle\sum_{i\in I} (\lambda a_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i$ il est indispensable que λ ne dépende pas de i !

Exemple 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (i-3)(i+1)$.

⚠ En général $\sum_{i\in I} a_i b_i \neq \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{i\in I} b_i\right)$. Par exemple :

$$\sum_{i=1}^{10}(1\times 1) = \ldots\ldots. \qquad \text{mais} \qquad \left(\sum_{i=1}^{10} 1\right)\left(\sum_{i=1}^{10} 1\right) = \ldots\ldots.$$

Théorème 4.10 – "Relation de Chasles"

Soit $m, r, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq r \leq n$. Soit $(a_i)_{m\leq i\leq n}$ une famille de réels. On a :

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{r} a_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_i \qquad\qquad \prod_{i=m}^{n} a_i = \left(\prod_{i=m}^{r} a_i\right)\left(\prod_{i=r+1}^{n} a_i\right)$$

Exemple 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{i=0}^{2n} \min(i,n)$.

Théorème 4.11 – Sommation / Produit par paquets

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels. Soit $J_1, \cdots, J_n$ des parties de I qui forment une partition de I. Alors :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in J_1} a_i + \ldots + \sum_{i\in J_n} a_i \qquad \prod_{i\in I} a_i = \left(\prod_{i\in J_1} a_i\right) \times \ldots \times \left(\prod_{i\in J_n} a_i\right)$$

1.6 Changement d'indice dans une somme

Le changement d'indice dans une somme est l'équivalent du changement de variables dans l'intégrale. C'est juste une façon de réécrire la même somme différemment. Il consiste à réécrire la sommme en définissant un nouvel indice de sommation en fonction de l'ancien :

$$\sum_{i=m}^{n} a_i \quad = \quad \sum_{j=\ldots}^{\ldots} a_{\ldots} \qquad \text{avec } j = \underset{\substack{\text{(expression en}\\ \text{fonction de } i)}}{\ldots\ldots}$$

(Dans cet exemple i est l'ancien indice et j est le nouveau).

Il n'y a que deux formes de changement d'indices qui soient autorisées :

$$j = i + \overset{\in\mathbb{Z}}{\ldots\ldots} \qquad \text{ou} \qquad j = \overset{\in\mathbb{Z}}{\ldots\ldots} - i$$

Méthode

Lors d'un changement d'indice dans une somme, il faut :

1. **Écrire sur la copie** l'expression de j (nouvel indice) en fonction de i (ancien indice).
2. Remplacer tous les i dans a_i par des j en se servant de l'égalité $j = \pm i + \overset{\in\mathbb{Z}}{\ldots\ldots}$.
3. Modifier les bornes de la somme $\displaystyle\sum_{j=\ldots}^{\ldots}$: il faut mettre **en bas la plus petite valeur** que prendra j et **en haut la plus grande valeur** que prendra j :

$$\sum_{i=m}^{n} \quad \overset{j=i+\ldots}{=} \quad \sum_{j=m+\ldots}^{n+\ldots}$$

$$\sum_{i=m}^{n} \quad \overset{j=\ldots-i}{=} \quad \sum_{j=\ldots-n}^{\ldots-m} \qquad \text{(inversion des bornes !)}$$

Exemple 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (i+2)^2$.

Remarque. Les indices de sommation étant muets, l'ancien indice n'est pas toujours noté i et le nouveau n'est pas toujours noté j. Il faut savoir s'adapter au cas par cas.

Exemple 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Compléter ci-dessous :

$$\sum_{k=n}^{2n} \sqrt{k} = \sum_{j=\dots}^{\dots} \dots\dots\dots\dots\dots \qquad \text{avec } j = k - n$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^{2n-i} = \sum_{k=\dots}^{\dots} \dots\dots\dots\dots\dots \qquad \text{avec } k = 2n - i$$

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(n-k) = \sum_{j=\dots}^{\dots} \dots\dots\dots\dots\dots \qquad \text{avec } j = n + 1 - k$$

Méthode – Symétrisation

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. Soit $(x_k)_{m \leq k \leq n}$ une famille de réels. Alors :

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{j=m}^{n} x_{n+m-j} \qquad \text{avec } j = n + m - k$$

1.7 Sommes usuelles (partie 2)

Remarque. Rappel : si $x \neq 0$, alors $x^0 = 1$. En revanche, "0^0" n'est pas toujours défini, notamment dans le calcul de limites. On évitera donc de l'écrire.

Néanmoins, dans le cadre d'une *somme*, par *convention* : $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k := 1 + x + \dots + x^n$ pour tout réel x, même pour $x = 0$. Quand on développe une somme, tout terme x^0 est en fait traité comme un 1 (et on évitera d'écrire x^0).

Théorème 4.12 – Factorisation de $a^n - b^n$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$a^n - b^n \quad = \quad (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \quad = \quad (a-b)\sum_{j=0}^{n-1} a^{n-1-j} b^j$$

Démonstration. Montrons la première égalité.

Montrons la seconde égalité.

□

Remarque. En partant de la seconde expression du Théorème 4.12 (avec j comme indice de sommation), on obtient sous forme développée :

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2 b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

En particulier, avec $n = 2$, on retrouve l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Théorème 4.13 – Somme géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Démonstration.

$\square$

2 Coefficients binomiaux et formule du binôme

2.1 Coefficient binomial, combinaisons

Définition 4.14 – Factorielle

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre entier factorielle n, noté $n!$ est défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k \qquad \text{produit des entiers de 1 à } n$$

On a en particulier $\quad 0! = 1$

Le fait que $\quad 0! = 1 \quad$ vient du fait que l'on a un produit "vide" : $\quad 0! = \prod_{k=1}^{0} k = 1.$

Définition 4.15

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. On définit le coefficient binomial $\binom{n}{k}$, dit "k parmi n", de la façon suivante :

- Si $0 \leq k \leq n$, alors
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
- Si $k < 0$ ou $k > n$, alors par convention $\binom{n}{k} = 0$.

Une autre manière de réécrire le coefficient binomial est :

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$$

On notera que dans le membre de droite, il y a k termes au numérateur et k termes au dénominateur ! C'est donc utile lorsqu'on veut calculer $\binom{n}{k}$ pour de petites valeurs de k :

Exemple 14. Soit $n \in \mathbb{N}$. On vérifie directement que :

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \frac{n}{1} = n \qquad \binom{n}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \binom{7}{3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque. Le nombre $\binom{n}{k}$ correspond également au nombre de sous-ensembles de cardinal k dans un ensemble de cardinal n. Par exemple, comme $\binom{4}{2} = 6$, cela signifie qu'un ensemble à 4 éléments $\{a,b,c,d\}$ possède exactement 6 sous-ensembles ayant 2 éléments :

$$\{a,b\} \quad \{a,c\} \quad \{a,d\} \quad \{b,c\} \quad \{b,d\} \quad \{c,d\}$$

Théorème 4.16 – Symétrie

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Démonstration.

- Si $0 \leq k \leq n$, on a :

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

- Si $k < 0$, on a $\binom{n}{k} = 0$ et par ailleurs, puisque $n - k > n$, on a $\binom{n}{n-k} = 0$.
- Si $k > n$, on a $\binom{n}{k} = 0$ et par ailleurs, puisque $n - k < 0$, on a $\binom{n}{n-k} = 0$.

□

Exemple 15. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\binom{n}{n-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \binom{n}{n-2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Théorème 4.17 – (Triangle de Pascal)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Démonstration. Si $k < 0$ ou $k \geq n$, le résultat découle immédiatement de la convention du coefficient binomial et du fait que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. On traite maintenant le cas $0 \leq k < n$.

□

Triangle de Pascal. Il permet de déduire les valeurs de $\binom{n}{k}$ pour de petites valeurs de k et de n. Comme $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, on peut placer les 1 comme ci-dessous. On peut aussi remplir d'autres cases en utilisant le fait que $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$. Les cases restantes se déduisent du Théorème 4.17.

$\binom{n}{k}$		k					
		0	1	2	3	4	5
	0	1					
	1	1	1				
	2	1		1			
n	3	1			1		
	4	1				1	
	5	1					1

2.2 Binôme de Newton

Théorème 4.18 – Formule du binôme

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \qquad \text{(avec la convention } 0^0 = 1\text{)}$$

Démonstration. La seconde égalité découle du changement d'indice $j = n - k$ (symétrisation). Il suffit donc de montrer la première égalité pour montrer la formule entière.

$\square$

Remarque (Calcul de $(a+b)^n$ pour des petites valeurs de n)**.** Pour appliquer la formule, il faut connaitre les coefficients $\binom{n}{k}$ pour $k \in [\![0,n]\!]$. Pour cela, on peut former le triangle de Pascal jusqu'à la ligne n. Les coefficients $\binom{n}{k}$ se lisent alors sur la ligne numéro n.

Exemple 16. Soit $a,b \in \mathbb{R}$. On a : $(a+b)^4 =$ ....

Exemple 17 (Archi-classique !)**.** Soit $a,b \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

3 Sommes doubles

3.1 Définition, somme rectangulaire

Certaines familles peuvent être indexées par plusieurs indices, par exemple $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 2\\ 1\leq j\leq 3}}$ est une famille de 6 éléments : $a_{11},\quad a_{12},\quad a_{13},\quad a_{21},\quad a_{22},\quad a_{23}$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} S &= (a_{11}+a_{12}+a_{13})+(a_{21}+a_{22}+a_{23}) \\ &= \sum_{j=1}^{3} a_{1j} \quad + \quad \sum_{j=1}^{3} a_{2j} \\ &= \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\right) \end{aligned}$$

Grossièrement, on appelle somme double une somme qui fait intervenir deux indices de sommation, comme celle de la dernière ligne ci-dessus. On peut encore écrire $S = \sum_{\substack{1\leq i\leq 2\\ 1\leq j\leq 3}} a_{ij}$: il n'y a alors qu'une seule somme mais qui fait intervenir un couple d'indices : là encore on considère qu'il s'agit d'une somme double.

Notation. Les parenthèses sont le plus souvent sous-entendues :

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \quad := \quad \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\right)$$

Enfin, si les indices i et j parcourent le même ensemble, par exemple $[\![1,n]\!]$, on peut noter la somme double :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij} \quad := \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

Définition 4.19

On appelle somme (double) rectangulaire une expression de la forme

$$\sum_{i=i_0}^{m}\sum_{j=j_0}^{n} a_{ij}$$

avec $i_0, j_0, m, n \in \mathbb{N}$ et $(a_{ij})_{(i,j)\in(\ldots)}$ une famille de réels.

Théorème 4.20 – Interversion dans une somme rectangulaire

On peut permuter les deux sommes d'une somme rectangulaire. Ainsi, avec les mêmes notations que la définition, on a :

$$\sum_{i=i_0}^{m}\left(\sum_{j=j_0}^{n} a_{ij}\right) = \sum_{j=j_0}^{n}\left(\sum_{i=i_0}^{m} a_{ij}\right) \qquad \text{ou encore} \qquad \sum_{i=i_0}^{m}\sum_{j=j_0}^{n} a_{ij} = \sum_{j=j_0}^{n}\sum_{i=i_0}^{m} a_{ij}$$

Pour les sommes rectangulaires, cette interversion peut simplifier légèrement le calcul même si on peut en général s'en passer.

Exemple 18. Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (i+j)$.

3.2 Découplage de sommes rectangulaire

Pour une somme double rectangulaire $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$, si on peut écrire $a_{ij} = b_i \times c_j$ (avec bien sûr b_i indépendant de j et c_j indépendant de i), on dispose d'un résultat intéressant qui permet de se ramener à un produit de sommes simples

Théorème – Découplage de sommes doubles

Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Soit $(b_i)_{1 \leq i \leq m}$ et $(c_j)_{1 \leq j \leq n}$ deux familles de réels. Alors :

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_i c_j = \left(\sum_{i=1}^{m} b_i \right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} c_j \right)$$

Démonstration.

$\square$

Exemple 19. Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{2i-j}$.

3.3 Somme triangulaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ une famille de réels.

- Dans le cas d'une somme rectangulaire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$, tous les réels a_{ij} sont sommés, de a_{11} à a_{nn}. Ainsi, le couple (i,j) prend toutes les valeurs de $[\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!]$.
- Dans le cas d'une somme triangulaire, on somme uniquement les réels a_{ij} pour lesquels le couple (i,j) vérifie une relation de la forme $i \leq j$, ou $i < j$, cf ci-dessous.

Avec la condition $i \leq j$, on somme les couples (i,j) marqués d'une croix ci-dessous :

$$
\begin{array}{cc|ccccc}
 & n & \times & \times & \times & \cdots & \times \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \\
j & 3 & \times & \times & \times & & \\
 & 2 & \times & \times & & \text{zone} & \\
 & 1 & \times & & & i>j & \\
\hline
 & & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\
 & & & & i & &
\end{array}
$$

La somme des réels a_{ij} pour lesquels $i \leq j$ est notée :

$$\sum_{1\,\leq\, i\,\leq\, j\,\leq\, n} a_{ij}$$

Avec la condition $i < j$, on somme les couples (i,j) marqués d'une croix ci-dessous :

$$
\begin{array}{cc|ccccc}
 & n & \times & \times & \cdots & \times \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \\
j & 3 & \times & \times & & \\
 & 2 & \times & & & \text{zone} \\
 & 1 & & & & i \geq j \\
\hline
 & & 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\
 & & & & i & &
\end{array}
$$

La somme des réels a_{ij} pour lesquels $i < j$ est notée :

$$\sum_{1\,\leq\, i\,<\, j\,\leq\, n} a_{ij}$$

Cependant, cette écriture de la somme triangulaire n'est guère pratique si on souhaite calculer la somme (un peu comme $\displaystyle\sum_{1\,\leq\, i,j\,\leq\, n} a_{ij}$ pour une somme rectangulaire). On va donc voir deux réécritures possibles.

Réécritures de somme triangulaire Prenons pour exemple la somme $\displaystyle\sum_{1\,\leq\, i\,\leq\, j\,\leq\, n} a_{ij}$.

- On peut faire une première somme pour i allant de 1 à n (car i prend ses valeurs pour au moins un terme du tableau), puis on fait une somme sur les indices j allant de 1 à n tels que $i \leq j$:

- On peut faire une première somme pour j allant de 1 à n (car j prend ses valeurs pour au moins un terme du tableau), puis on fait une somme sur les indices i allant de 1 à n tels que $i \leq j$:

Théorème 4.21 – Interversion dans une somme rectangulaire

On peut permuter les deux sommes d'une somme triangulaire selon la formule suivante :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=\boxed{i}}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{\boxed{j}} a_{ij}$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=\boxed{\cdots}}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{\boxed{\cdots}} a_{ij}$$

N'apprenez pas par cœur ces formules ! Il faut savoir les retrouver avec du bon sens et de l'entrainement.

Remarque. Face à une somme triangulaire, il est très fréquent qu'une interversion de sommes “débloque” le calcul.

Exemple 20. Calculer $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}$.

4 Méthodes pour les exercices

Avant toute chose, il faut bien avoir en tête les règles de calcul avec les symboles $\sum$ et $\prod$, ce qui est permis et surtout ce qui ne l'est pas.

Méthode

Pour calculer une somme $\sum_{k=\dots}^{\dots} a_k$, on peut :

- Reconnaitre une somme usuelle : $\sum_{k=0}^{n} k$, $\sum_{k=0}^{n} k^2$, $\sum_{k=0}^{n} x^k$, ou encore $(a+b)^n$ et $a^n - b^n$.
- Faire apparaitre du télescopage.
- Faire des réécritures, des changements d'indice pour décomposer la somme en plusieurs morceaux plus simples, ou encore pour se ramener à un des cas ci-dessus.

Cette méthode s'adapte aussi pour les produits $\prod_{k=\dots}^{\dots} a_k$, notamment faire apparaitre un produit télescopique.

Par ailleurs, pour une somme de termes d'une suite géométrique, il est toujours intéressant de se rappeler la "formule" :

$$\sum q^k \underbrace{=}_{\text{si } q\neq 1} \text{premier terme} \times \frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

Méthode

Pour calculer une somme double $\sum_{i=\dots}^{\dots} \sum_{j=\dots}^{\dots} a_{ij}$, on peut :

- Employer la méthode directe : on calcule $\sum_{j=\dots}^{\dots} a_{ij}$ à i fixé, puis $\sum_{i=\dots}^{\dots} \sum_{j=\dots}^{\dots} a_{ij}$.
- On intervertit les sommes puis on retente la méthode directe (attention si la somme est triangulaire).
- Si $a_{ij} = b_i c_j$ et que la somme est rectangulaire, on se ramène à calculer un produit de sommes simples.